数　　学　　I

（全　問　必　答）

第１問　（配点　25）

〔1〕

(1)　x を実数とし

$$A = x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$$

とおく。整数 n に対して

$$(x+n)(n+5-x) = x(5-x) + n^2 + \boxed{\text{ア}}\,n$$

であり，したがって，$X = x(5-x)$ とおくと

$$A = X\left(X + \boxed{\text{イ}}\right)\left(X + \boxed{\text{ウエ}}\right)$$

と表せる。

$x = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき，$X = \boxed{\text{オ}}$ であり，$A = 2^{\boxed{\text{カ}}}$ である。

（数学 I 第１問は次ページに続く。）

(2) 実数 x が

$$(x+1)(x+2)(6-x)(7-x)=-16$$

を満たすとき，$x(5-x)=$ $\boxed{\text{キクケ}}$ である。したがって，このとき

$$x=\frac{\boxed{\text{コ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

（数学Ⅰ第１問は次ページに続く。）

〔2〕

(1) 全体集合 U を $U = \{x \mid x$ は20以下の自然数$\}$ とし，次の部分集合 A，B，C を考える。

$A = \{x \mid x \in U$ かつ x は20の約数$\}$

$B = \{x \mid x \in U$ かつ x は3の倍数$\}$

$C = \{x \mid x \in U$ かつ x は偶数$\}$

集合 A の補集合を $\overline{A}$ と表し，空集合を $\varnothing$ と表す。

次の $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

集合の関係

(a) $A \subset C$

(b) $A \cap B = \varnothing$

の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{セ}}$ である。

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

(数学Ⅰ第1問は次ページに続く。)

次の $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

集合の関係

(c) $(A \cup C) \cap B = \{6,\ 12,\ 18\}$

(d) $(\overline{A} \cap C) \cup B = \overline{A} \cap (B \cup C)$

の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{ソ}}$ である。

	⓪	①	②	③
(c)	正	正	誤	誤
(d)	正	誤	正	誤

(2) 実数 x に関する次の条件 p，q，r，s を考える。

$$p：|x-2|>2, \quad q：x<0, \quad r：x>4, \quad s：\sqrt{x^2}>4$$

次の $\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

q または r であることは，p であるための $\boxed{\text{タ}}$。また，s は r であるための $\boxed{\text{チ}}$。

⓪ 必要条件であるが，十分条件ではない
① 十分条件であるが，必要条件ではない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

数学Ⅰ

第2問 (配点 25)

a を正の実数とし

$$f(x) = ax^2 - 2(a+3)x - 3a + 21$$

とする。2次関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点の x 座標を p とおくと

$$p = \boxed{\text{ア}} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{a}$$

である。

(1) $0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が $f(4)$ となるような a の値の範囲は

$$0 < a \leqq \boxed{\text{ウ}}$$

である。

また，$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が $f(p)$ となるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{エ}} \leqq a$$

である。

したがって，$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が1であるのは

$$a = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \text{または} \quad a = \frac{\boxed{\text{キ}} + \sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

のときである。

(数学Ⅰ第2問は次ページに続く。)

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるのは

$$0 < a < \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \quad \text{または} \quad \boxed{\text{ス}} < a$$

のときである。この二つの交点の間の距離を L とする。$2 < L < 4$ となるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} < a < \frac{\boxed{\text{タ}} - \sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}, \quad \frac{\boxed{\text{ト}} + \sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} < a$$

である。

第 3 問 （配点　30）

$\triangle$ABC において，AB $= 6$，BC $= \sqrt{21}$，AC $= 3$ とする。

(1)　このとき

$$\cos \angle \mathrm{BAC} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \qquad \sin \angle \mathrm{BAC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

（数学 I 第 3 問は次ページに続く。）

(2) 点Cから辺ABに下ろした垂線をCHとするとき，AH = $\boxed{\text{オ}}$，CH = $\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。また，線分 CH 上に AH = HD を満たす点Dをとるとき，AD = $\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$，CD = $\sqrt{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}}$ であるから

$$\triangle\mathrm{ACD}\text{ の面積} = \sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}}$$

であり

$$\sin\angle\mathrm{CAD} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{スセ}}} - \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。したがって，△ACD の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。また，辺 AB の中点を E とし，直線 AD と辺 BC の交点を F とすると

$$\frac{\triangle\mathrm{ACF}\text{ の面積}}{\triangle\mathrm{AEF}\text{ の面積}} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}} - \boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

第4問 (配点　20)

ある陸上競技大会に出場した選手の身長(単位はcm)と体重(単位はkg)のデータが得られた。男子短距離，男子長距離，女子短距離，女子長距離の四つのグループに分けると，それぞれのグループの選手数は，男子短距離が328人，男子長距離が271人，女子短距離が319人，女子長距離が263人である。

(1) 次ページの図1および図2は，男子短距離，男子長距離，女子短距離，女子長距離の四つのグループにおける，身長のヒストグラムおよび箱ひげ図である。

次の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑥のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

図1および図2から読み取れる内容として正しいものは，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ である。

⓪ 四つのグループのうちで範囲が最も大きいのは，女子短距離グループである。

① 四つのグループのすべてにおいて，四分位範囲は12未満である。

② 男子長距離グループのヒストグラムでは，度数最大の階級に中央値が入っている。

③ 女子長距離グループのヒストグラムでは，度数最大の階級に第1四分位数が入っている。

④ すべての選手の中で最も身長の高い選手は，男子長距離グループの中にいる。

⑤ すべての選手の中で最も身長の低い選手は，女子長距離グループの中にいる。

⑥ 男子短距離グループの中央値と男子長距離グループの第3四分位数は，ともに180以上182未満である。

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

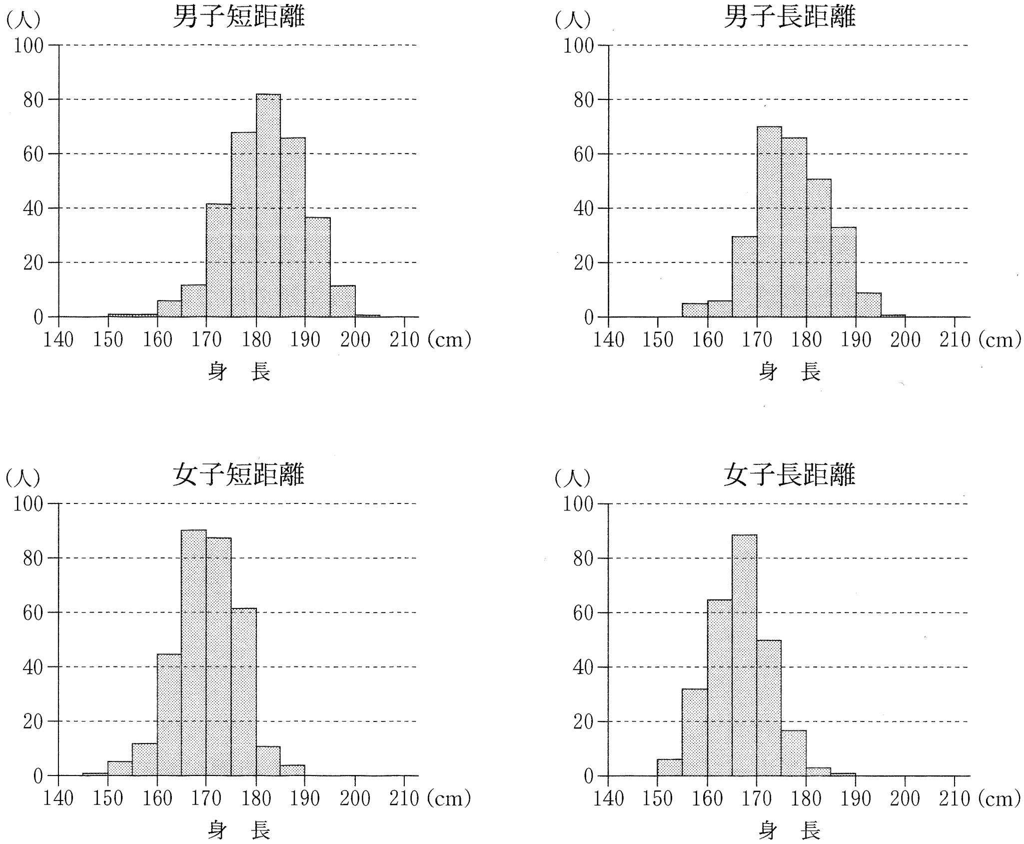

図1　身長のヒストグラム

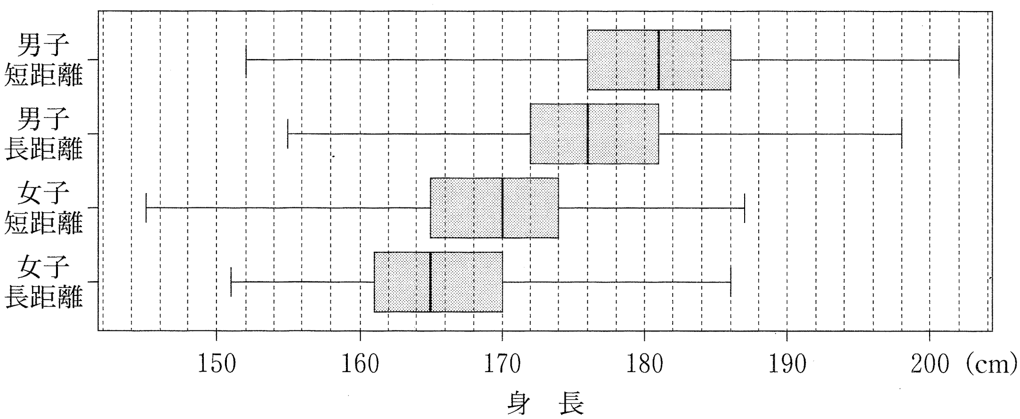

図2　身長の箱ひげ図

(出典：図1，図2はガーディアン社のWebページにより作成)

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

(2) 身長をH，体重をWとし，Xを$X=\left(\frac{H}{100}\right)^2$で，$Z$を$Z=\frac{W}{X}$で定義する。次ページの図3は，男子短距離，男子長距離，女子短距離，女子長距離の四つのグループにおけるXとWのデータの散布図である。ただし，原点を通り，傾きが15，20，25，30である四つの直線l_1，l_2，l_3，l_4も補助的に描いている。また，次ページの図4の(a)，(b)，(c)，(d)で示すZの四つの箱ひげ図は，男子短距離，男子長距離，女子短距離，女子長距離の四つのグループのいずれかの箱ひげ図に対応している。

次の $\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

図3および図4から読み取れる内容として正しいものは，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ である。

⓪ 四つのグループのすべてにおいて，XとWには負の相関がある。

① 四つのグループのうちでZの中央値が一番大きいのは，男子長距離グループである。

② 四つのグループのうちでZの範囲が最小なのは，男子長距離グループである。

③ 四つのグループのうちでZの四分位範囲が最小なのは，男子短距離グループである。

④ 女子長距離グループのすべてのZの値は25より小さい。

⑤ 男子長距離グループのZの箱ひげ図は(c)である。

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

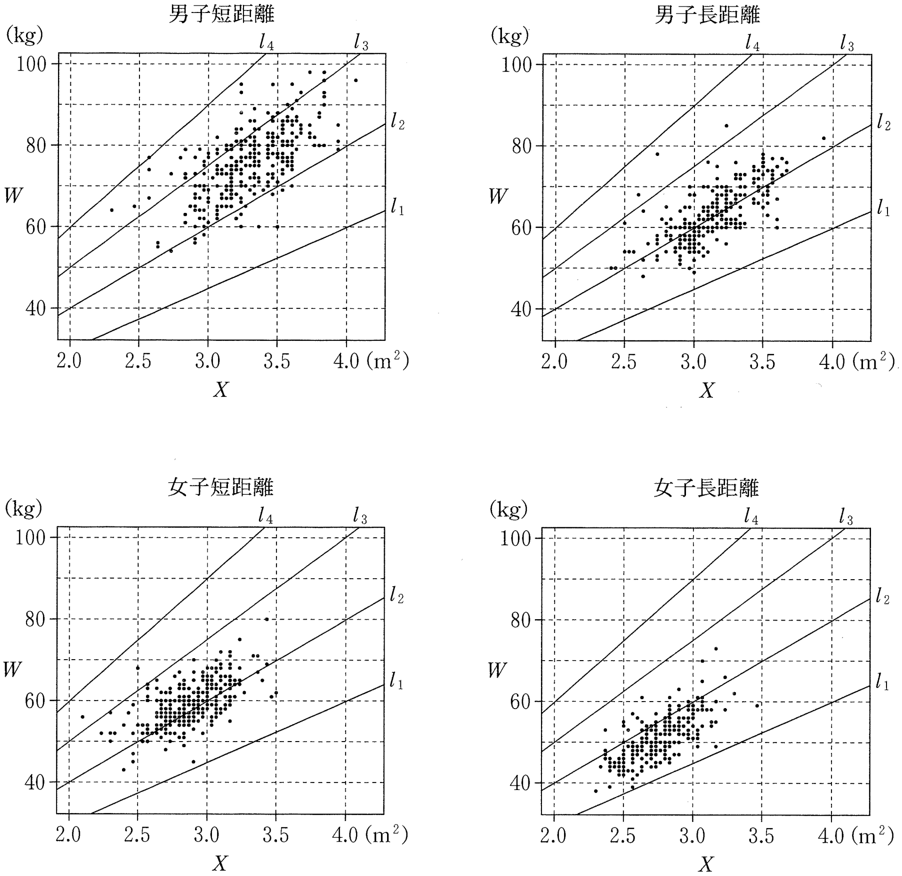

図 3　X と W の散布図

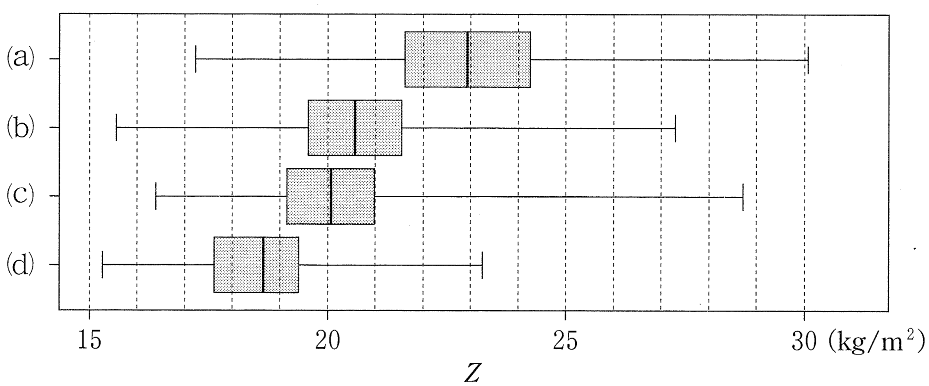

図 4　Z の箱ひげ図

（出典：図 3，図 4 はガーディアン社の Web ページにより作成）

（数学Ⅰ第 4 問は次ページに続く。）

(3) 次の表1は，設問(2)で定義されたX，Wについて，女子長距離グループの平均値，標準偏差および共分散を計算したものである。ただし，XとWの共分散は，Xの偏差とWの偏差の積の平均値である。なお，表1の数値は正確な値であり，四捨五入されていないものとする。

表1　平均値，標準偏差および共分散

Xの平均値	Wの平均値	Xの標準偏差	Wの標準偏差	XとWの共分散
2.75	51.1	0.200	5.36	0.754

次の オ に当てはまる数値として最も近い値を，下の⓪～④のうちから一つ選べ。

女子長距離グループのデータにおいて，XとWの相関係数は， オ である。

⓪ 0.603　① 0.653　② 0.703　③ 0.753　④ 0.803

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

(4) n を自然数とする。実数値のデータ x_1，x_2，$\cdots$，x_n に対して，平均値 $\overline{x}$ を

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

とおくと，分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}{n} - (\overline{x})^2$$

で計算できることが知られている。

次の $\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまる数値として最も近い値を，下の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

女子長距離グループのデータについて考える。

設問(2)で定義された X と H の関係を用いると，設問(3)の表 1 の数値により，このグループの身長のデータを各々 2 乗した値の平均値は $\boxed{\text{カ}}$ である。また，このグループの身長の平均値が 165.7 のとき，このグループの身長の分散は $\boxed{\text{キ}}$ である。必要ならば，$165.7^2 = 27456.49$ を用いてもよい。

⓪ 4.00	① 27.5	② 43.5	③ 44.7	④ 104.4
⑤ 275	⑥ 400	⑦ 27500	⑧ 72325	