数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔１〕

(1)　次の**問題A**について考えよう。

> **問題A**　関数 $y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \frac{1}{2}$$

であるから，三角関数の合成により

$$y = \boxed{\text{イ}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}\right)$$

と変形できる。よって，y は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(2)　p を定数とし，次の**問題B**について考えよう。

> **問題B**　関数 $y = \sin\theta + p\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

(i)　$p = 0$ のとき，y は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(ii) $p > 0$ のときは，加法定理

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$$

を用いると

$$y = \sin\theta + p\cos\theta = \sqrt{\boxed{\text{キ}}}\cos(\theta - \alpha)$$

と表すことができる。ただし，α は

$$\sin\alpha = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}},\quad \cos\alpha = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}},\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。このとき，y は $\theta = \boxed{\text{コ}}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

(iii) $p < 0$ のとき，y は $\theta = \boxed{\text{シ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる。

$\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ -1	① 1	② $-p$
③ p	④ $1-p$	⑤ $1+p$
⑥ $-p^2$	⑦ p^2	⑧ $1-p^2$
⑨ $1+p^2$	ⓐ $(1-p)^2$	ⓑ $(1+p)^2$

$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① α	② $\dfrac{\pi}{2}$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕 二つの関数 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ について考える。

(1) $f(0)=$ $\boxed{\text{セ}}$, $g(0)=$ $\boxed{\text{ソ}}$ である。また, $f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から, $x=$ $\boxed{\text{タ}}$ で最小値 $\boxed{\text{チ}}$ をとる。

$g(x)=-2$ となる x の値は $\log_2\left(\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}-\boxed{\text{テ}}\right)$ である。

(2) 次の①〜④は, x にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$f(-x)=$ $\boxed{\text{ト}}$ ………………………… ①

$g(-x)=$ $\boxed{\text{ナ}}$ ………………………… ②

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=$ $\boxed{\text{ニ}}$ ………………………… ③

$g(2x)=$ $\boxed{\text{ヌ}}$ $f(x)g(x)$ ………………………… ④

$\boxed{\text{ト}}$, $\boxed{\text{ナ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $f(x)$	① $-f(x)$	② $g(x)$	③ $-g(x)$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(3) 花子さんと太郎さんは，$f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

花子：①〜④ は三角関数の性質に似ているね。

太郎：三角関数の加法定理に類似した式(A)〜(D)を考えてみたけど，つねに成り立つ式はあるだろうか。

花子：成り立たない式を見つけるために，式(A)〜(D)の β に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうかな。

太郎さんが考えた式

$f(\alpha-\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)$ ………………………… (A)

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ ………………………… (B)

$g(\alpha-\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ ………………………… (C)

$g(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)$ ………………………… (D)

(1)，(2)で示されたことのいくつかを利用すると，式(A)〜(D)のうち，$\boxed{ネ}$ 以外の三つは成り立たないことがわかる。$\boxed{ネ}$ は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

$\boxed{ネ}$ の解答群

⓪ (A)	① (B)	② (C)	③ (D)

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

(1) 座標平面上で，次の二つの2次関数のグラフについて考える。

$y = 3x^2 + 2x + 3$ ………………………… ①

$y = 2x^2 + 2x + 3$ ………………………… ②

①，②の2次関数のグラフには次の**共通点**がある。

共通点

- y 軸との交点の y 座標は $\boxed{\text{ア}}$ である。
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{\text{イ}}x + \boxed{\text{ウ}}$ である。

次の⓪～⑤の2次関数のグラフのうち，y 軸との交点における接線の方程式が $y = \boxed{\text{イ}}x + \boxed{\text{ウ}}$ となるものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $y = 3x^2 - 2x - 3$	① $y = -3x^2 + 2x - 3$
② $y = 2x^2 + 2x - 3$	③ $y = 2x^2 - 2x + 3$
④ $y = -x^2 + 2x + 3$	⑤ $y = -x^2 - 2x + 3$

a，b，c を0でない実数とする。

曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{\text{オ}}\right)$ における接線を ℓ とすると，その方程式は $y = \boxed{\text{カ}}x + \boxed{\text{キ}}$ である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

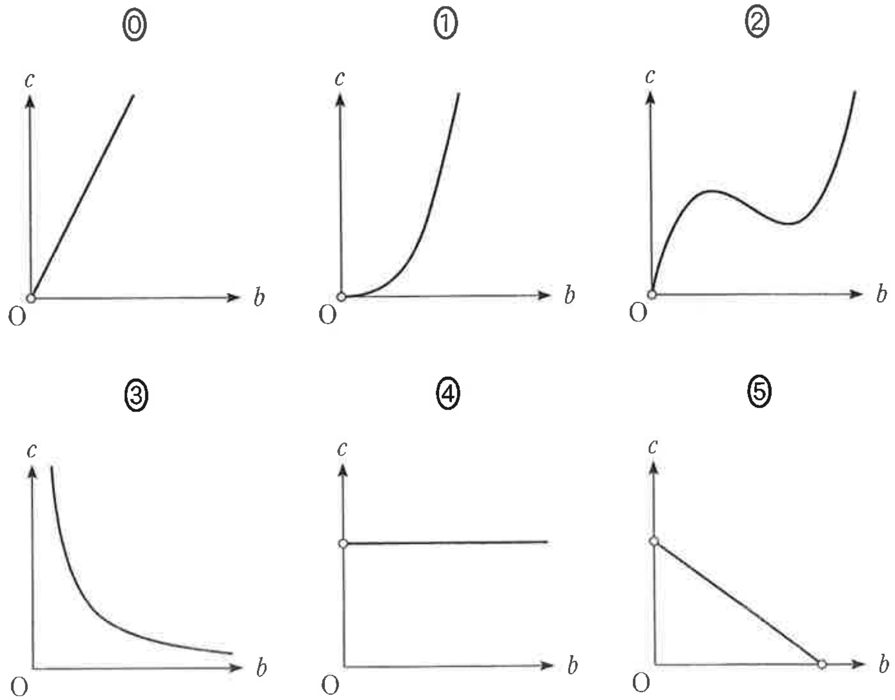
a，b，c が正の実数であるとき，曲線 $y = ax^2 + bx + c$ と接線 ℓ および直線 $x = \dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{ac^{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}\,b^{\boxed{\text{ス}}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

である。

③において，$a = 1$ とし，S の値が一定となるように正の実数 b，c の値を変化させる。このとき，b と c の関係を表すグラフの概形は $\boxed{\text{セ}}$ である。

$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。



（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

(2) 座標平面上で，次の三つの3次関数のグラフについて考える。

$y = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ ………………………………… ④

$y = -2x^3 + 7x^2 + 3x + 5$ ………………………………… ⑤

$y = 5x^3 - x^2 + 3x + 5$ ………………………………… ⑥

④，⑤，⑥の3次関数のグラフには次の**共通点**がある。

共通点

- y 軸との交点の y 座標は $\boxed{\text{ソ}}$ である。
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{\text{タ}}\,x + \boxed{\text{チ}}$ である。

a，b，c，d を0でない実数とする。

曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{\text{ツ}}\right)$ における接線の方程式は $y = \boxed{\text{テ}}\,x + \boxed{\text{ト}}$ である。

（数学Ⅱ第2問は次ページに続く。）

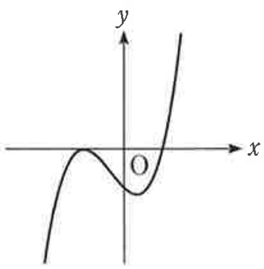
次に，$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$，$g(x) = \boxed{\text{テ}}\,x + \boxed{\text{ト}}$ とし，$f(x) - g(x)$ について考える。

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。a，b，c，d が正の実数であるとき，$y = h(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ナ}}$ である。

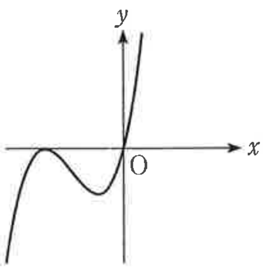
$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ である。また，x が $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ の間を動くとき，$|f(x) - g(x)|$ の値が最大となるのは，$x = \dfrac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ のときである。

$\boxed{\text{ナ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

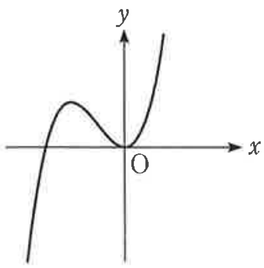
⓪



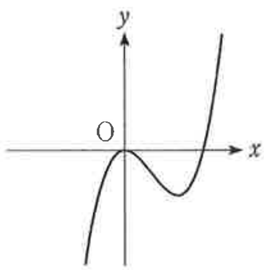
①



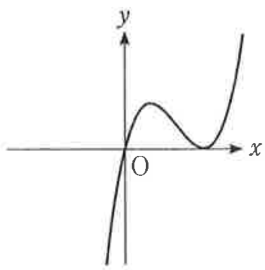
②



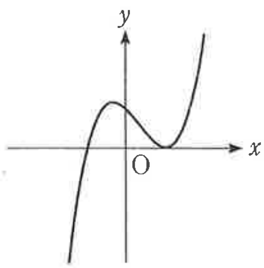
③



④



⑤



数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

a は $a > 1$ を満たす定数とする。また，座標平面上に点 M(2，−1)がある。M と異なる点 P(s，t)に対して，点 Q を，3 点 M，P，Q がこの順に同一直線上に並び，線分 MQ の長さが線分 MP の長さの a 倍となるようにとる。

(1) 点 P は線分 MQ を $1 : \left(\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\right)$ に内分する。よって，点 Q の座標を(x，y)とすると

$$s = \frac{x + \boxed{\text{ウエ}} - \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}, \quad t = \frac{y - \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(2) 座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。点 P が C 上を動くとき，点 Q の軌跡を考える。

点 P が C 上にあるとき

$$s^2 + t^2 = 1$$

が成り立つ。

点 Q の座標を(x，y)とすると，x，y は

$$\left(x + \boxed{\text{コサ}} - \boxed{\text{シ}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{ス}} + \boxed{\text{セ}}\right)^2 = \boxed{\text{ソ}}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たすので，点 Q は $\left(-\boxed{\text{コサ}} + \boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}}\right)$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ソ}}$ の円上にある。

(数学Ⅱ第 3 問は次ページに続く。)

(3) k を正の定数とし，直線 $\ell : x+y-k=0$ と円 $C : x^2+y^2=1$ は接しているとする。このとき，$k=\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。

点 P が ℓ 上を動くとき，点 Q$(x,\ y)$ の軌跡の方程式は

$$x+y+\left(\boxed{\text{チ}}-\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\right)a-\boxed{\text{テ}}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

であり，点 Q の軌跡は ℓ と平行な直線である。

(4) (2) の ① が表す円を C_a，(3) の ② が表す直線を ℓ_a とする。C_a の中心と ℓ_a の距離は $\boxed{\text{ト}}$ であり，C_a と ℓ_a は $\boxed{\text{ナ}}$。

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪ $a+1$	① $a-1$	② a
③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$	④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+1)$	⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a-1)$
⑥ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}a$	⑦ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}a$	

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ a の値によらず，2 点で交わる

① a の値によらず，接する

② a の値によらず，共有点をもたない

③ a の値によらず共有点をもつが，a の値によって，2 点で交わる場合と接する場合がある

④ a の値によって，共有点をもつ場合と共有点をもたない場合がある

第4問 （配点　20）

k を実数とし，x の整式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^4 + (k - 1)x^2 + (6 - 2k)x + 3k$$

とする。

(1)　$k = 0$ とする。このとき

$$P(x) = x\left(x^3 - x + \boxed{\text{ア}}\right)$$

である。また，$P(-2) = \boxed{\text{イ}}$ である。これらのことにより，$P(x)$ は

$$P(x) = x\left(x + \boxed{\text{ウ}}\right)(x^2 - 2x + 3)$$

と因数分解できる。

また，方程式 $P(x) = 0$ の虚数解は $\boxed{\text{エ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{オ}}}\, i$ である。

(2)　$k = 3$ とすると，$P(x)$ を $x^2 - 2x + 3$ で割ることにより

$$P(x) = \left(x^2 + \boxed{\text{カ}}\,x + \boxed{\text{キ}}\right)(x^2 - 2x + 3)$$

が成り立つことがわかる。

（数学Ⅱ第4問は次ページに続く。）

(3) (1), (2)の結果を踏まえると，次の**予想**が立てられる。

予想

kがどのような実数であっても，$P(x)$はx^2-2x+3で割り切れる。

この**予想**が正しいとすると，ある実数m，nに対して

$$P(x)=(x^2+mx+n)(x^2-2x+3)$$

が成り立つ。この式のx^3の係数に着目することにより，$m=$ $\boxed{\text{ク}}$ が得られる。また，定数項に着目することにより，$n=k$が得られる。

このとき，実際に

$$\left(x^2+\boxed{\text{ク}}\,x+k\right)(x^2-2x+3)$$

$$=x^4+(k-1)x^2+(6-2k)x+3k$$

が成り立つことが計算により確かめられ，この**予想**が正しいことがわかる。

(4) 方程式$P(x)=0$が実数解をもたないようなkの値の範囲は

$$k>\boxed{\text{ケ}}$$

である。

（下 書 き 用 紙）