数　学　Ⅱ

(全　問　必　答)

第1問 (配点　30)

〔1〕

(1) $k > 0$, $k \neq 1$ とする。関数 $y = \log_k x$ と $y = \log_2 kx$ のグラフについて考えよう。

(i) $y = \log_3 x$ のグラフは点 $\left(27,\ \boxed{\text{ア}}\right)$ を通る。また，$y = \log_2 \dfrac{x}{5}$ のグラフは点 $\left(\boxed{\text{イウ}},\ 1\right)$ を通る。

(ii) $y = \log_k x$ のグラフは，k の値によらず定点 $\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ を通る。

(iii) $k = 2$，3，4 のとき

$y = \log_k x$ のグラフの概形は $\boxed{\text{カ}}$

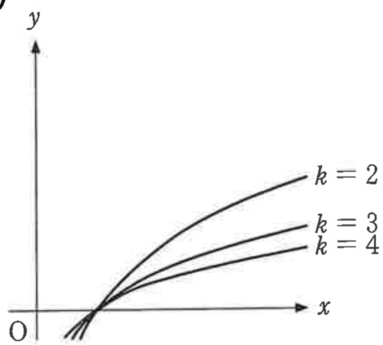
$y = \log_2 kx$ のグラフの概形は $\boxed{\text{キ}}$

である。

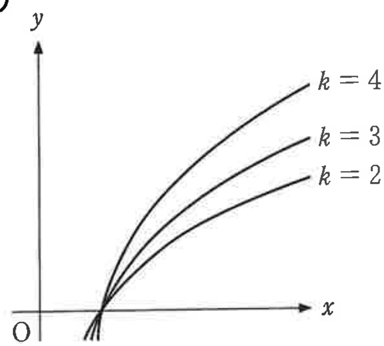
(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

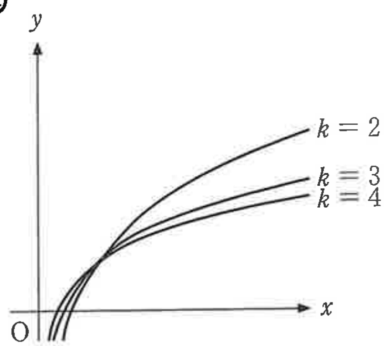
⓪



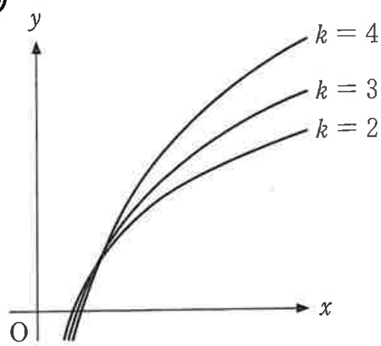
①



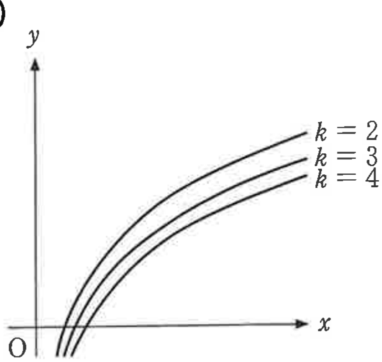
②



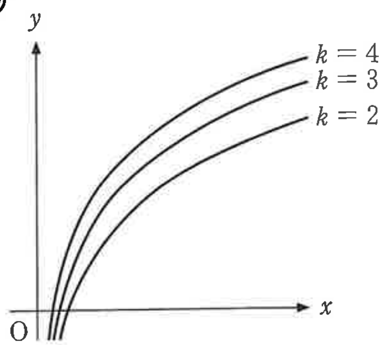
③



④



⑤

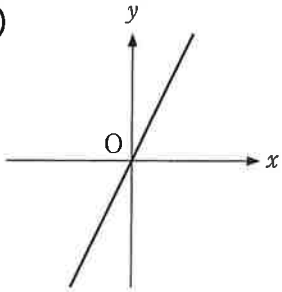


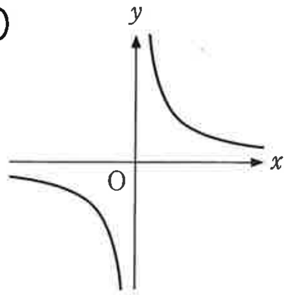
（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

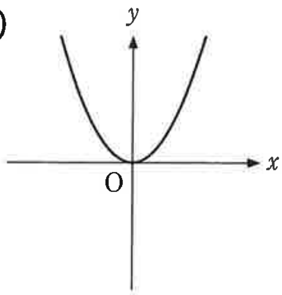
(2) $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$ とする。$\log_x y$ について考えよう。

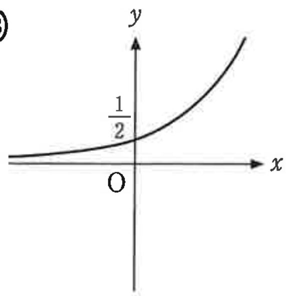
(i) 座標平面において，方程式 $\log_x y = 2$ の表す図形を図示すると，$\boxed{\text{ク}}$ の $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$ の部分となる。

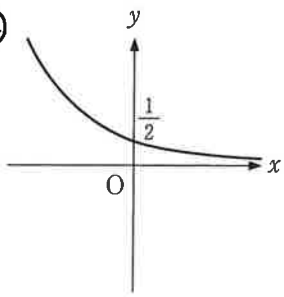
$\boxed{\text{ク}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

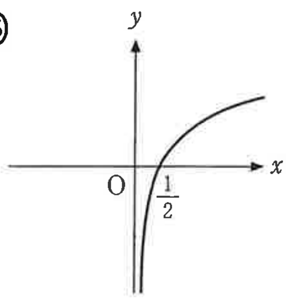
⓪


①


②


③


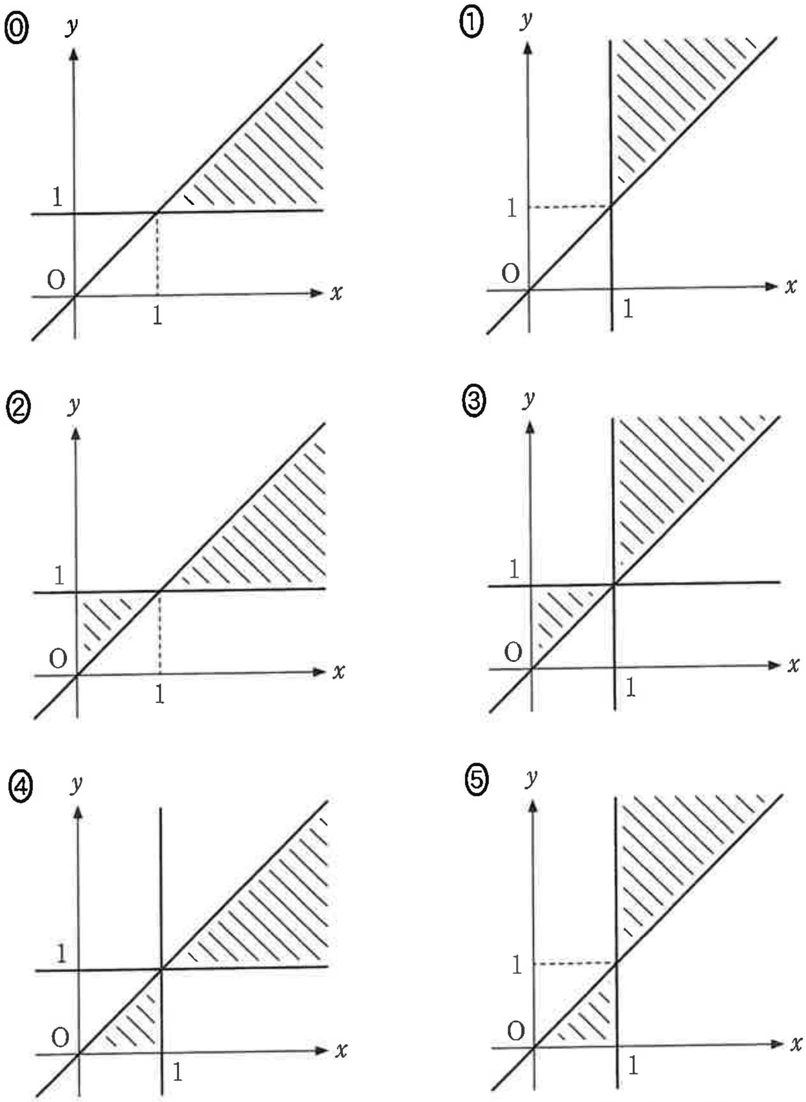
④


⑤


（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(ii) 座標平面において，不等式 $0 < \log_x y < 1$ の表す領域を図示すると，$\boxed{\text{ケ}}$ の斜線部分となる。ただし，境界(境界線)は含まない。

$\boxed{\text{ケ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。



(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕 $S(x)$ を x の2次式とする。x の整式 $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$，余りを $U(x)$ とする。ただし，$S(x)$ と $P(x)$ の係数は実数であるとする。

(1) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 5$，$S(x) = x^2 + 4x + 7$ の場合を考える。

方程式 $S(x) = 0$ の解は $x = \boxed{\text{コサ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{シ}}}\, i$ である。

また，$T(x) = \boxed{\text{ス}}\, x - \boxed{\text{セ}}$，$U(x) = \boxed{\text{ソタ}}$ である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(2) 方程式 $S(x)=0$ は異なる二つの解 α, β をもつとする。このとき

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になる

ことと同値な条件を考える。

(i) 余りが定数になるときを考えてみよう。

仮定から，定数 k を用いて $U(x)=k$ とおける。このとき，$\boxed{\text{チ}}$。

したがって，余りが定数になるとき，$\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{チ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる。また，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

① $P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

② $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる。また，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

③ $P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ $T(\alpha)=T(\beta)$	① $P(\alpha)=P(\beta)$
② $T(\alpha)\neq T(\beta)$	③ $P(\alpha)\neq P(\beta)$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(ii) 逆に $\boxed{ツ}$ が成り立つとき，余りが定数になるかを調べよう。

$S(x)$が2次式であるから，m，nを定数として$U(x) = mx + n$とおける。$P(x)$を$S(x)$，$T(x)$，m，nを用いて表すと，$P(x) = \boxed{テ}$ となる。この等式のxにα，βをそれぞれ代入すると $\boxed{ト}$ となるので，$\boxed{ツ}$ と$\alpha \neq \beta$より $\boxed{ナ}$ となる。以上から余りが定数になることがわかる。

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ $(mx + n)S(x)T(x)$	① $S(x)T(x) + mx + n$
② $(mx + n)S(x) + T(x)$	③ $(mx + n)T(x) + S(x)$

$\boxed{ト}$ の解答群

⓪ $P(\alpha) = T(\alpha)$ かつ $P(\beta) = T(\beta)$

① $P(\alpha) = m\alpha + n$ かつ $P(\beta) = m\beta + n$

② $P(\alpha) = (m\alpha + n)T(\alpha)$ かつ $P(\beta) = (m\beta + n)T(\beta)$

③ $P(\alpha) = P(\beta) = 0$

④ $P(\alpha) \neq 0$ かつ $P(\beta) \neq 0$

$\boxed{ナ}$ の解答群

⓪ $m \neq 0$	① $m \neq 0$ かつ $n = 0$
② $m \neq 0$ かつ $n \neq 0$	③ $m = 0$
④ $m = n = 0$	⑤ $m = 0$ かつ $n \neq 0$
⑥ $n = 0$	⑦ $n \neq 0$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(i), (ii)の考察から，方程式$S(x)=0$が異なる二つの解α，βをもつとき，$P(x)$を$S(x)$で割った余りが定数になることと$\boxed{\text{ツ}}$であることは同値である。

(3) pを定数とし，$P(x)=x^{10}-2x^9-px^2-5x$，$S(x)=x^2-x-2$の場合を考える。$P(x)$を$S(x)$で割った余りが定数になるとき，$p=\boxed{\text{ニヌ}}$となり，その余りは$\boxed{\text{ネノ}}$となる。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

m を $m>1$ を満たす定数とし，$f(x)=3(x-1)(x-m)$ とする。また，$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とする。関数 $y=f(x)$ と $y=S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう。

(1) $m=2$ のとき，すなわち，$f(x)=3(x-1)(x-2)$ のときを考える。

(i) $f'(x)=0$ となる x の値は $x=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(ii) $S(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x f(t)\,dt \\ &= \int_0^x \left(3t^2-\boxed{\text{ウ}}\,t+\boxed{\text{エ}}\right)dt \\ &= x^3-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^2+\boxed{\text{キ}}\,x \end{aligned}$$

であるから

$x=\boxed{\text{ク}}$ のとき，$S(x)$ は極大値 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ をとり

$x=\boxed{\text{サ}}$ のとき，$S(x)$ は極小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとることがわかる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(iii) $f(3)$と一致するものとして，次の⓪～④のうち，正しいものは $\boxed{ス}$ である。

$\boxed{ス}$ の解答群

⓪ $S(3)$
① 2点$(2,\ S(2))$，$(4,\ S(4))$を通る直線の傾き
② 2点$(0,\ 0)$，$(3,\ S(3))$を通る直線の傾き
③ 関数$y=S(x)$のグラフ上の点$(3,\ S(3))$における接線の傾き
④ 関数$y=f(x)$のグラフ上の点$(3,\ f(3))$における接線の傾き

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1，$1 \leqq x \leqq m$ の範囲で，関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_1 = \boxed{セ}$，$S_2 = \boxed{ソ}$ である。

$S_1 = S_2$ となるのは $\boxed{タ} = 0$ のときであるから，$S_1 = S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{チ}$ である。また，$S_1 > S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{ツ}$ である。

$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$	① $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$	② $\displaystyle\int_1^m f(x)\,dx$
③ $\displaystyle\int_0^1 \{-f(x)\}\,dx$	④ $\displaystyle\int_0^m \{-f(x)\}\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$

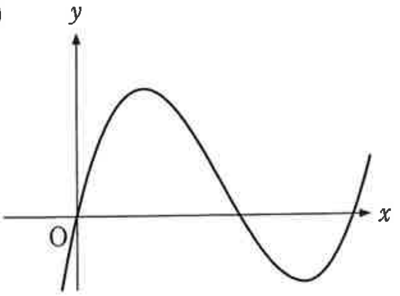
$\boxed{タ}$ の解答群

⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$	① $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$
② $\displaystyle\int_1^m f(x)\,dx$	③ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^m f(x)\,dx$
④ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^m f(x)\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^m f(x)\,dx$
⑥ $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx + \int_1^m f(x)\,dx$	

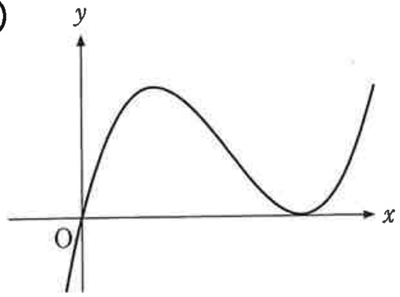
(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

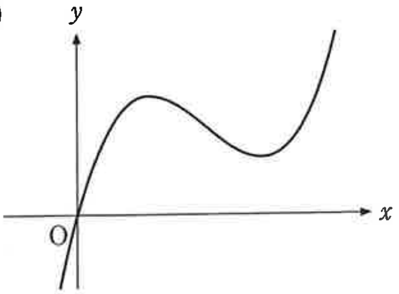
⓪



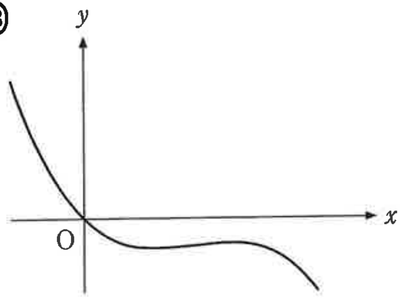
①



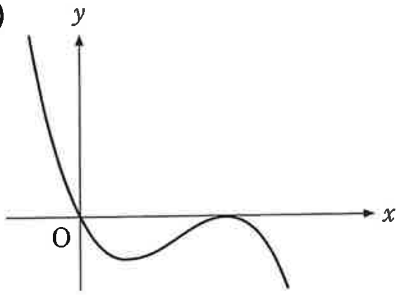
②



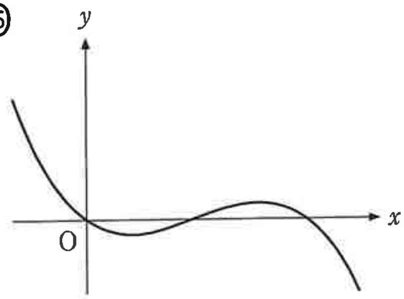
③



④



⑤



（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

(3) 関数 $y=f(x)$ のグラフの特徴から関数 $y=S(x)$ のグラフの特徴を考えてみよう。

関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\boxed{\text{テ}}$ に関して対称であるから，すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^{1} f(x)\,dx=\int_{m}^{\boxed{\text{ト}}} f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立ち，$M=\boxed{\text{テ}}$ とおくと $0<q\leqq M-1$ であるすべての実数 q に対して

$$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}\,dx=\int_{M}^{\boxed{\text{ナ}}}\{-f(x)\}\,dx \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。すべての実数 α，β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=S(\beta)-S(\alpha)$$

が成り立つことに注意すれば，① と ② はそれぞれ

$$S(1-p)+S\left(\boxed{\text{ト}}\right)=\boxed{\text{ニ}}$$

$$2S(M)=\boxed{\text{ヌ}}$$

となる。

以上から，すべての正の実数 p に対して，2点 $(1-p,\ S(1-p))$，$\left(\boxed{\text{ト}},\ S\left(\boxed{\text{ト}}\right)\right)$ を結ぶ線分の中点についての記述として，後の⓪～⑤のうち，最も適当なものは $\boxed{\text{ネ}}$ である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ m	① $\dfrac{m}{2}$	② $m+1$	③ $\dfrac{m+1}{2}$

$\boxed{ト}$ の解答群

⓪ $1-p$	① p	② $1+p$
③ $m-p$	④ $m+p$	

$\boxed{ナ}$ の解答群

⓪ $M-q$	① M	② $M+q$
③ $M+m-q$	④ $M+m$	⑤ $M+m+q$

$\boxed{ニ}$ の解答群

⓪ $S(1)+S(m)$	① $S(1)+S(p)$	② $S(1)-S(m)$
③ $S(1)-S(p)$	④ $S(p)-S(m)$	⑤ $S(m)-S(p)$

$\boxed{ヌ}$ の解答群

⓪ $S(M-q)+S(M+m-q)$	① $S(M-q)+S(M+m)$
② $S(M-q)+S(M)$	③ $2S(M-q)$
④ $S(M+q)+S(M-q)$	⑤ $S(M+m+q)+S(M-q)$

$\boxed{ネ}$ の解答群

⓪ x 座標は p の値によらず一つに定まり，y 座標は p の値により変わる。
① x 座標は p の値により変わり，y 座標は p の値によらず一つに定まる。
② 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。
③ 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。
④ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。
⑤ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。

第3問 （配点　20）

(1)　$\cos x = 0$ を満たす x は，$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲に二つある。そのうち，値が小さい方は $x =$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，大きい方は $x =$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① $\dfrac{\pi}{6}$	② $\dfrac{\pi}{3}$	③ $\dfrac{\pi}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}\pi$	⑤ $\dfrac{5}{6}\pi$	⑥ π	⑦ $\dfrac{7}{6}\pi$
⑧ $\dfrac{4}{3}\pi$	⑨ $\dfrac{3}{2}\pi$	ⓐ $\dfrac{5}{3}\pi$	ⓑ $\dfrac{11}{6}\pi$

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

(2)

(i)　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式

$$\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考える。

三角関数の加法定理により

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \boxed{ウ}$$

$$\cos x = \cos(2x - x) = \boxed{エ}$$

が成り立つ。これらを用いると

$$\cos 3x + \cos 2x + \cos x = \left(\boxed{オ} + 1\right)\cos 2x \quad \cdots\cdots ②$$

が得られる。

②により，①は $\boxed{カ}$ 個の解をもつことがわかる。そのうち，最も小さい解は $x = \dfrac{\pi}{\boxed{キ}}$ であり，2番目に小さい解は $x = \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\pi$ である。

$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$	① $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$
② $-\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$	③ $-\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$
④ $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$	⑤ $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$
⑥ $-\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$	⑦ $-\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$\boxed{オ}$ の解答群

⓪ $\sin x$	① $-\sin x$	② $\cos x$	③ $-\cos x$
④ $2\sin x$	⑤ $-2\sin x$	⑥ $2\cos x$	⑦ $-2\cos x$

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(ii) n を 3 以上の自然数とする。$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式

$$\cos(n+1)x + \cos nx + \cos(n-1)x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

を考える。

(i)と同じように考えると，③のすべての解を求めることができる。そのうち，最も小さい解は $x =$ $\boxed{\text{コ}}$ であり，2番目に小さい解は $x =$ $\boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{\text{コ}}$ ，$\boxed{\text{サ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① $\dfrac{\pi}{6}$	② $\dfrac{\pi}{4}$	③ $\dfrac{\pi}{3}$
④ $\dfrac{\pi}{2}$	⑤ $\dfrac{2}{3}\pi$	⑥ $\dfrac{\pi}{n}$	⑦ $\dfrac{2}{n}\pi$
⑧ $\dfrac{3}{n}\pi$	⑨ $\dfrac{\pi}{2n}$	ⓐ $\dfrac{3}{2n}\pi$	ⓑ $\dfrac{5}{2n}\pi$

（下 書 き 用 紙）

数学Ⅱの試験問題は次に続く。

第４問 （配点　20）

座標平面において，方程式 $x^2+y^2=4$ が表す円を C_1，$x^2-8x+y^2+15=0$ が表す円を C_2 とする。

必要に応じて，次のことを用いてもよい。

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離を d とするとき

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となる。

(1)　C_2 の中心は点 $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$，半径は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(2) C_1 と C_2 の両方に接する直線の方程式を求める方法について考えよう。

次の**方針**に基づいて考える。

方針

C_1 の接線のうち，C_2 にも接するものを求める。

C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ をとり，P における C_1 の接線を ℓ とする。P は C_1 上にあるので

$$p^2 + q^2 = 4$$

が成り立つ。

(i) ℓ の方程式を求めよう。

$p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ の場合を考える。原点 $(0,\ 0)$ と P を結ぶ直線を m とすると，ℓ と m は垂直である。m の傾きは $\boxed{\text{エ}}$ であるので，ℓ の傾きは $\boxed{\text{オ}}$ となる。よって，ℓ の方程式は $\boxed{\text{カ}}$ となる。

$p = 0$ または $q = 0$ の場合も，$\boxed{\text{カ}}$ の表す直線は，P における C_1 の接線となることがわかる。

$\boxed{\text{エ}}$ ，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ p	① q	② $-p$	③ $-q$
④ $\dfrac{1}{p}$	⑤ $\dfrac{1}{q}$	⑥ $-\dfrac{1}{p}$	⑦ $-\dfrac{1}{q}$
⑧ $\dfrac{q}{p}$	⑨ $\dfrac{p}{q}$	ⓐ $-\dfrac{q}{p}$	ⓑ $-\dfrac{p}{q}$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $px + qy = 2$	① $px - qy = 2$	② $qx + py = 2$
③ $qx - py = 2$	④ $px + qy = 4$	⑤ $px - qy = 4$
⑥ $qx + py = 4$	⑦ $qx - py = 4$	

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(ii) ℓ が C_2 に接するのは， $\boxed{キ}$ ときである。

$\boxed{キ}$ の解答群

⓪ ℓ が x 軸に平行である
① ℓ が y 軸に平行である
② ℓ が C_2 の中心を通る
③ C_2 の中心と ℓ の距離が，C_1 の半径に等しい
④ C_2 の中心と ℓ の距離が，C_2 の半径に等しい

（数学Ⅱ第4問は次ページに続く。）

(iii) (i), (ii) での考察から，次のことがわかる。

ℓ が C_2 に接するときの P の座標は

$$(p,\ q)=\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}\right),\quad \left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ -\frac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}\right),$$

$$\left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}\right),\quad \left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}},\ -\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)$$

である。ただし，$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}<\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ とする。よって，これらの p，q の組を $\boxed{\text{カ}}$ に代入すれば，C_1 と C_2 の両方に接する直線の方程式が得られる。

（下 書 き 用 紙）