数　学　Ⅱ

(全　問　必　答)

第１問　(配点　30)

〔1〕 連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15} & \cdots\cdots ① \\ \cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であり，$\alpha < \beta$ かつ

$$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \quad \cdots\cdots ③$$

とする。このとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよう。

2倍角の公式を用いると，① から

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

が得られる。また，② から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{15}$ である。

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

したがって，条件 ③ を用いると

$$\cos^2\alpha = \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}, \qquad \cos^2\beta = \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

である。よって，② と条件 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha < \beta$ から

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}, \qquad \cos\beta = \frac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$$

である。

（数学Ⅱ第1問は次ページに続く。）

〔2〕 座標平面上に点A$\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$をとり，関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上に2点 B(p, $\log_2 p$)，C(q, $\log_2 q$)をとる。線分ABを1：2に内分する点がCであるとき，p，q の値を求めよう。

真数の条件により，$p >$ $\boxed{\text{タ}}$，$q >$ $\boxed{\text{タ}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

線分ABを1：2に内分する点の座標は，p を用いて

$$\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p,\quad \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p + \boxed{\text{ナ}}\right)$$

と表される。これがCの座標と一致するので

$$\begin{cases} \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p = q & \cdots\cdots ④ \\ \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p + \boxed{\text{ナ}} = \log_2 q & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

が成り立つ。

（数学Ⅱ第1問は次ページに続く。）

⑤は

$$p = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} q^{\boxed{\text{ネ}}} \quad \cdots\cdots ⑥$$

と変形できる。④と⑥を連立させた方程式を解いて，$p > \boxed{\text{タ}}$，$q > \boxed{\text{タ}}$ に注意すると

$$p = \boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}, \quad q = \boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$$

である。

また，C の y 座標 $\log_2\left(\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}\right)$ の値を，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると，$\boxed{\text{ヘ}}$ である。$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから一つ選べ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

⓪ 0.3　① 0.6　② 0.9　③ 1.3　④ 1.6　⑤ 1.9
⑥ 2.3　⑦ 2.6　⑧ 2.9　⑨ 3.3　ⓐ 3.6　ⓑ 3.9

第2問 (配点 30)

Oを原点とする座標平面上の放物線$y = x^2 + 1$をCとし，点$(a,\ 2a)$をPとする。

(1) 点Pを通り，放物線Cに接する直線の方程式を求めよう。

C上の点$(t,\ t^2 + 1)$における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}\,tx - t^2 + \boxed{\text{イ}}$$

である。この直線がPを通るとすると，tは方程式

$$t^2 - \boxed{\text{ウ}}\,at + \boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}} = 0$$

を満たすから，$t = \boxed{\text{カ}}\,a - \boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$である。よって，$a \neq \boxed{\text{ケ}}$のとき，Pを通る$C$の接線は2本あり，それらの方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{コ}}\,a - \boxed{\text{サ}}\right)x - \boxed{\text{シ}}\,a^2 + \boxed{\text{ス}}\,a \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と

$$y = \boxed{\text{セ}}\,x$$

である。

(2) (1)の方程式①で表される直線をℓとする。ℓとy軸との交点をR$(0,\ r)$とすると，$r = -\boxed{\text{シ}}\,a^2 + \boxed{\text{ス}}\,a$である。$r > 0$となるのは，$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$のときであり，このとき，三角形OPRの面積$S$は

$$S = \boxed{\text{チ}}\left(a^{\boxed{\text{ツ}}} - a^{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

となる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，S の増減を調べると，S は $a = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$

で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ をとることがわかる。

(3) $\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，放物線 C と(2)の直線 ℓ および2直線 $x = 0$，$x = a$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}a^3 - \boxed{\text{ヒ}}a^2 + \boxed{\text{フ}}$$

である。$\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq a < \boxed{\text{タ}}$ の範囲において，T は $\boxed{\text{ヘ}}$。$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 減少する

① 極小値をとるが，極大値はとらない

② 増加する

③ 極大値をとるが，極小値はとらない

④ 一定である

⑤ 極小値と極大値の両方をとる

第３問 （配点　20）

座標平面上に２点A(０，３)，B(８，９)をとる。

(1)　２点A，Bを通る直線の方程式は $y = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x + \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　線分ABの長さは $\boxed{\text{エオ}}$ である。

(3)　線分ABを直径とする円 C の方程式は

$$\left(x - \boxed{\text{カ}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{キ}}\right)^2 = \boxed{\text{クケ}}$$

である。また，Aにおける C の接線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}x + \boxed{\text{ス}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

（数学Ⅱ第３問は次ページに続く。）

(4) 三角形ABPの面積が20である点Pの軌跡は，2直線

$$y = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x + \boxed{\text{タ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と

$$y = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x - \boxed{\text{チ}}$$

である。

(5) 直線①と直線②の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ツテト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ であり，円 C と直線②の交点の x 座標は $\boxed{\text{ニ}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

(6) 三角形ABPの面積が20であり，かつ三角形ABPが直角三角形であるような点Pは全部で $\boxed{\text{ハ}}$ 個ある。

第４問 （配点　20）

(1)　4次式$P(x)$は，x^4の係数が1で，x^2-2x+3で割り切れるとする。また，$P(x)$は$P(1)=12$，$P(2)=15$を満たすとする。

$P(x)$をx^2-2x+3で割った商を$S(x)=x^2+mx+n$　（m，nは実数）とおくと，$S(1)=$ $\boxed{\text{ア}}$，$S(2)=$ $\boxed{\text{イ}}$ であるから，$m=$ $\boxed{\text{ウエ}}$，$n=$ $\boxed{\text{オ}}$ である。方程式$S(x)=0$の解は

$$\boxed{\text{カ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,i$$

である。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(2)　2次式 $Q(x)=x^2+kx+\ell$ (k, ℓ は実数)を考える。c を正の実数として，$\alpha=c+\dfrac{1}{c}i$ とする。方程式 $Q(x)=0$ は複素数 α を解にもつとする。

$Q(x)$ の x に α を代入すると

$$Q(\alpha)=\frac{\boxed{\text{クケ}}}{c^2}+c^2+\boxed{\text{コ}}\,k+\ell+\left(\boxed{\text{サ}}+\frac{k}{c}\right)i$$

となる。k, ℓ を c を用いて表すと，$k=\boxed{\text{シスセ}}$，$\ell=\dfrac{c^{\boxed{\text{ソ}}}+\boxed{\text{タ}}}{c^2}$ である。

二項定理から，α の4乗は $\alpha^4=\boxed{\text{チ}}+\boxed{\text{ツ}}\,i$ となる。$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　$3\left(c^2+\dfrac{1}{c^2}\right)$　①　$4\left(c^2+\dfrac{1}{c^2}\right)$　②　$6\left(c^2+\dfrac{1}{c^2}\right)$

③　$3\left(c^2-\dfrac{1}{c^2}\right)$　④　$4\left(c^2-\dfrac{1}{c^2}\right)$　⑤　$6\left(c^2-\dfrac{1}{c^2}\right)$

⑥　$\left(c^4+\dfrac{1}{c^4}+4\right)$　⑦　$\left(c^4+\dfrac{1}{c^4}+6\right)$　⑧　$\left(c^4+\dfrac{1}{c^4}+10\right)$

⑨　$\left(c^4+\dfrac{1}{c^4}-4\right)$　ⓐ　$\left(c^4+\dfrac{1}{c^4}-6\right)$　ⓑ　$\left(c^4+\dfrac{1}{c^4}-10\right)$

相加平均と相乗平均の関係から，c が $c>0$ の範囲を動くとき，α^4 の実部 $\boxed{\text{チ}}$ は $c=\boxed{\text{テ}}$ で最小値 $\boxed{\text{トナ}}$ をとり，そのとき，$k=\boxed{\text{ニヌ}}$，$\ell=\boxed{\text{ネ}}$ である。