数　学　I

（全　問　必　答）

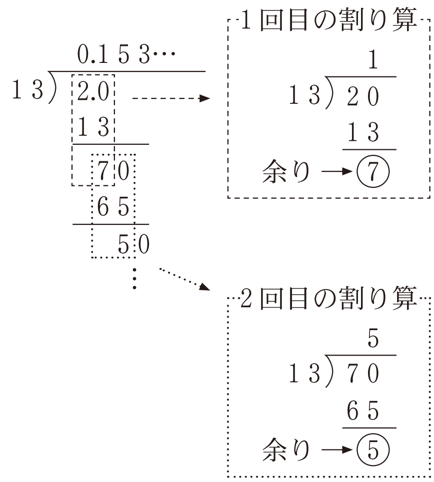
第１問 （配点　20）

〔１〕 分数を小数で表すときの仕組みについて考えよう。

例えば $\dfrac{2}{13}$ は，計算例１のような割り算を行うと小数で表すことができる。この場合，１回目の割り算の余りは７で，２回目の割り算の余りは５である。

$\dfrac{2}{13}$ 以外の分数の場合も同様に，１回目の割り算の余り，２回目の割り算の余り，３回目の割り算の余り，…ということにする。

計算例１　各回の割り算の余りの例



(1) $\dfrac{2}{13}$ を小数で表すと

$$0.\dot{1}53ab\dot{c}$$

という循環小数となる。ただし，a，b，c は０から９までの数字とする。このとき

$a=$ $\boxed{\text{ア}}$，　$b=$ $\boxed{\text{イ}}$，　$c=$ $\boxed{\text{ウ}}$

である。

（数学 I 第１問は次ページに続く。）

(2) $m < n$ である自然数 m, n に対し, $\dfrac{m}{n}$ を計算例1のようにして小数で表すことを考える。m を n で割ったときの各回の割り算の余りに着目すると，余りに0が出てくる場合は, $\dfrac{m}{n}$ は $\boxed{\text{エ}}$ となる。余りに0が出てこない場合は $\boxed{\text{オ}}$ から, $\dfrac{m}{n}$ は $\boxed{\text{カ}}$ となる。

$\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 整数	① 有限小数
② 循環小数	③ 循環しない無限小数

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ 割り算を続けても同じ余りが出てくることはない

① 割り算を続けると必ず同じ余りが出てくる

(数学Ⅰ第1問は次ページに続く。)

(3) 太郎さんと花子さんは，(1)の循環小数 $0.\dot{1}53ab\dot{c}$ の小数部分を一つずつずらして得られる循環小数 $0.\dot{5}3abc\dot{1}$ について話している。

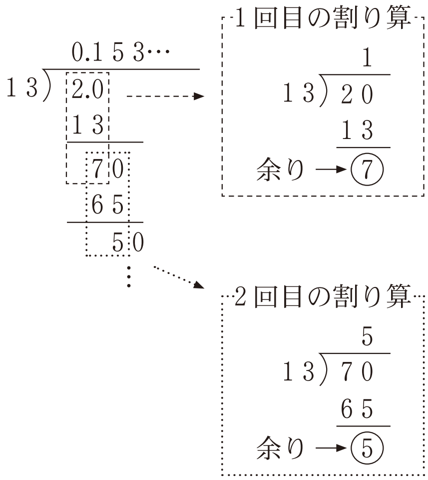
太郎：$0.\dot{5}3abc\dot{1}$ は $0.\dot{1}53ab\dot{c} \times 10$ からその整数部分の1を引いたものなので，$0.\dot{5}3abc\dot{1}$ を分数で表すには

$$0.\dot{5}3abc\dot{1} = \frac{2}{13} \times 10 - 1 = \frac{20-13}{13} = \frac{7}{13}$$

とすればよいね。さらにずらした $0.\dot{3}abc1\dot{5}$ などもこの方法で求められるね。

花子：分子の引き算 $20-13$ は，計算例1の1回目の割り算の余りを計算するときにやったよ。だから2を13で割ったときの各回の割り算の余りに着目して考えると，さらにずらしたものも，太郎さんがしたような計算をしなくても求められるよ。

計算例1（再掲）



（数学 I 第1問は次ページに続く。）

(i) 循環小数 $0.\dot{3}abc1\dot{5}$ は

$$0.\dot{3}abc1\dot{5} = \frac{7}{13} \times 10 - \boxed{\text{キ}} = \frac{70 - 13 \times \boxed{\text{キ}}}{13}$$

であるが，この分子の引き算 $70 - 13 \times \boxed{\text{キ}}$ は，計算例 1 の 2 回目の割り算の余りを求めるときの引き算と同じである。

(ii) 次の四つの循環小数

$$0.\dot{3}abc1\dot{5}\ ,\quad 0.\dot{a}bc15\dot{3}\ ,\quad 0.\dot{b}c153\dot{a}\ ,\quad 0.\dot{c}153a\dot{b}$$

をそれ以上約分できない分数で表したとき，その分子を小さい順に並べると

$$\boxed{\text{ク}},\quad \boxed{\text{ケ}},\quad \boxed{\text{コ}},\quad \boxed{\text{サシ}}$$

である。

（数学Ⅰ第 1 問は次ページに続く。）

〔2〕 自然数 n に関する条件 p，q を

p：n は 12 の約数である

q：n は 18 の約数である

とする。

(1) 条件 p，q を用いて表された命題について，次のことが成り立つ。

次の⓪～⑦のうち，$n = 9$ が反例となるのは $\boxed{ス}$ と $\boxed{セ}$ である。

$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ の解答群(解答の順序は問わない。)

⓪ 「$p \Longrightarrow q$」	① 「$q \Longrightarrow p$」
② 「$p \Longrightarrow \overline{q}$」	③ 「$\overline{q} \Longrightarrow p$」
④ 「$\overline{p} \Longrightarrow q$」	⑤ 「$q \Longrightarrow \overline{p}$」
⑥ 「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$」	⑦ 「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」

(数学Ⅰ第1問は次ページに続く。)

(2) 自然数 n に関する条件 r を

r：n は 6 の約数である

とする。このとき，次のことが成り立つ。

- r は，q であるための $\boxed{\text{ソ}}$。
- (p かつ q)は，r であるための $\boxed{\text{タ}}$。

$\boxed{\text{ソ}}$ ，$\boxed{\text{タ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 必要条件であるが，十分条件ではない
① 十分条件であるが，必要条件ではない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

(3) a を自然数とする。自然数 n に関する条件 s を

s：n は a の倍数である

とする。このとき

命題 A：「 $p \Longrightarrow (q$ または $s)$ 」

が真となる a の値のうち，最大のものは $\boxed{\text{チ}}$ である。

また，$a = \boxed{\text{チ}}$ のとき，命題 A の逆は偽であり，命題 A の逆に対する反例となる n の値のうち，最小のものは $\boxed{\text{ツ}}$ である。

第２問 （配点　30）

〔1〕 △OABの辺AB上に，点A，Bと異なる点Pをとる。△OAP，△OPB，△OABの外接円の半径を，それぞれ R_1，R_2，R_3 とする。

(1) $\dfrac{R_1}{R_3}$ と $\dfrac{R_2}{R_1}$ を，線分の長さの比を用いて表そう。

$$R_1 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{2\sin\angle\text{OAB}}$$

$$R_3 = \frac{\boxed{\text{イ}}}{2\sin\angle\text{OAB}}$$

である。したがって

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

が成り立つ。

$\dfrac{R_2}{R_3}$ についても同様に考えることにより，$\dfrac{R_2}{R_1}$ は

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_1}\cdot\frac{R_2}{R_3} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

を満たすことがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ OA	① OB	② OP
③ AB	④ AP	⑤ BP

（数学 I 第２問は次ページに続く。）

⑵　OA $= 3$，OB $= 4$，AB $= 5$ とする。R_1，R_2，R_3 の間の大小関係について考えよう。

（i）　点 P が OP $=$ OA を満たすとき

$$\mathrm{AP} = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

（ii）　$a = \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ とする。

R_1，R_2，R_3 の間の大小関係について，点 P が $0 < \mathrm{AP} < a$ を満たすとき $\boxed{\text{ク}}$ である。また，点 P が $a < \mathrm{AP} < 5$ を満たすとき $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$R_1 < R_2 < R_3$	①　$R_1 < R_3 < R_2$
②　$R_2 < R_1 < R_3$	③　$R_2 < R_3 < R_1$
④　$R_3 < R_1 < R_2$	⑤　$R_3 < R_2 < R_1$

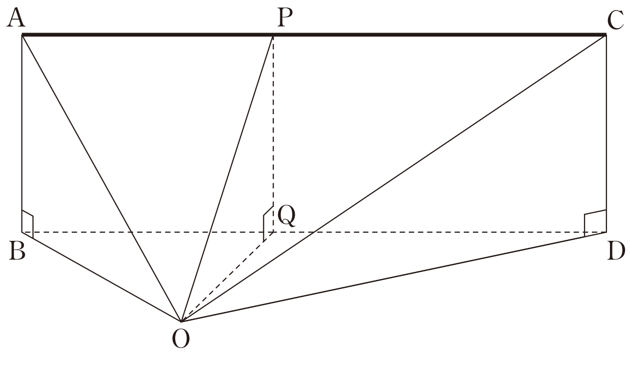
（数学Ⅰ第２問は次ページに続く。）

〔2〕 以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて46ページの三角比の表と，47ページの平方根の表を用いてもよい。

水平な地面の上空を飛行機Pが飛んでおり，太郎さんはその地面上の点Oから飛行機Pを見ている。以下では，目の高さと飛行機Pの大きさは無視して考える。飛行機Pから地面に下ろした垂線と地面との交点をQとするとき，$\angle \mathrm{POQ}$ を飛行機Pを見上げる角といい，線分PQの長さを飛行機Pの高さという。飛行機Pは，高さと速さを一定に保ちながらまっすぐに飛んでいるものとする。

ある時刻に，飛行機Pを見上げる角が 45° であったとし，そのときの飛行機Pの位置をA，点Aから地面に下ろした垂線と地面との交点をBとする。また，その140秒後に，飛行機Pを見上げる角が 30° であったとし，そのときの飛行機Pの位置をC，点Cから地面に下ろした垂線と地面との交点をDとする。さらに，$\angle \mathrm{BOD} = 150^\circ$ であったとする。

飛行機Pが点Aから点Cまで線分AC上を飛ぶ間における，飛行機Pを見上げる角 $\angle \mathrm{POQ}$ の大きさについて考察しよう。



参考図

（数学Ⅰ第2問は次ページに続く。）

(1) 飛行機 P の高さを h とする。

(i) $\angle$POQ は

$$\tan \angle \mathrm{POQ} = \boxed{\text{コ}}$$

を満たす。また，AB = CD = h より

$$\mathrm{OB} = h, \quad \mathrm{OD} = \sqrt{\boxed{\text{サ}}}\,h, \quad \mathrm{BD} = \sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,h$$

および

$$\cos \angle \mathrm{OBD} = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$$

である。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

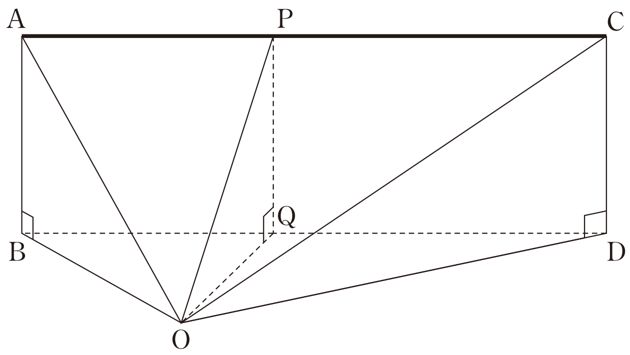
⓪ OP・h	① OQ・h	② $\dfrac{1}{\mathrm{OP}\cdot h}$	③ $\dfrac{1}{\mathrm{OQ}\cdot h}$
④ $\dfrac{\mathrm{OP}}{h}$	⑤ $\dfrac{\mathrm{OQ}}{h}$	⑥ $\dfrac{h}{\mathrm{OP}}$	⑦ $\dfrac{h}{\mathrm{OQ}}$

（数学 I 第 2 問は次ページに続く。）

(ii) 飛行機 P が点 A を通過してから 70 秒後の位置にあるとき

$$\mathrm{OQ} = \frac{h}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。また，このときの ∠POQ の大きさは $\boxed{\text{ツ}}$ である。



参考図（再掲）

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ 40° 以上 45° 未満	① 45° 以上 50° 未満
② 50° 以上 55° 未満	③ 55° 以上 60° 未満
④ 60° 以上 65° 未満	⑤ 65° 以上 70° 未満
⑥ 70° 以上 75° 未満	⑦ 75° 以上 80° 未満
⑧ 80° 以上 85° 未満	⑨ 85° 以上 90° 未満

（数学 I 第 2 問は次ページに続く。）

(2) 太郎さんは，飛行機Pが点Aを通過してから何秒後に $\angle POQ$ の大きさが最大になるかを，$\angle POQ$ の大きさと線分 OQ の長さの関係に着目して考えている。

$\angle POQ$ の大きさが最大になるのは，点Qが $\boxed{テ}$ のときであり，飛行機Pが点Aを通過してから $\boxed{トナ}$ 秒後である。また，このときの $\angle POQ$ の大きさは $\boxed{ニ}$ である。

$\boxed{テ}$ の解答群

- ⓪ 線分 BD の中点
- ① $\angle BOD$ の二等分線と線分 BD との交点
- ② 点Oから線分 BD に下ろした垂線と線分 BD との交点

$\boxed{ニ}$ の解答群

⓪ 40° 以上 45° 未満	① 45° 以上 50° 未満
② 50° 以上 55° 未満	③ 55° 以上 60° 未満
④ 60° 以上 65° 未満	⑤ 65° 以上 70° 未満
⑥ 70° 以上 75° 未満	⑦ 75° 以上 80° 未満
⑧ 80° 以上 85° 未満	⑨ 85° 以上 90° 未満

（数学Ⅰ第2問は次ページに続く。）

三角比の表

角	正弦（sin）	余弦（cos）	正接（tan）	角	正弦（sin）	余弦（cos）	正接（tan）
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	—

（数学Ｉ第２問は次ページに続く。）

平方根の表

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
1	1.0000	26	5.0990
2	1.4142	27	5.1962
3	1.7321	28	5.2915
4	2.0000	29	5.3852
5	2.2361	30	5.4772
6	2.4495	31	5.5678
7	2.6458	32	5.6569
8	2.8284	33	5.7446
9	3.0000	34	5.8310
10	3.1623	35	5.9161
11	3.3166	36	6.0000
12	3.4641	37	6.0828
13	3.6056	38	6.1644
14	3.7417	39	6.2450
15	3.8730	40	6.3246
16	4.0000	41	6.4031
17	4.1231	42	6.4807
18	4.2426	43	6.5574
19	4.3589	44	6.6332
20	4.4721	45	6.7082
21	4.5826	46	6.7823
22	4.6904	47	6.8557
23	4.7958	48	6.9282
24	4.8990	49	7.0000
25	5.0000	50	7.0711

第３問 （配点　30）

〔１〕 $f(x) = x^2 - 4x$ とする。

(1)

(i) 2次不等式 $f(x) \leqq -1$ の解は

$$\boxed{ア} - \sqrt{\boxed{イ}} \leqq x \leqq \boxed{ア} + \sqrt{\boxed{イ}}$$

である。

(ii) 2次関数 $y = f(x)$ のグラフの軸は直線 $x = \boxed{ウ}$ である。また，$y = f(x)$ の最小値は $\boxed{エオ}$ である。

(iii) $0 \leqq x \leqq 3$ における $y = f(x)$ の最大値は $\boxed{カ}$ である。

（数学Ⅰ第３問は次ページに続く。）

(2) sを正の定数とする。(1)の $\boxed{\text{エオ}}$ が，$0 \leqq x \leqq s$における$y = f(x)$の最小値となるための必要十分条件は$s \geqq \boxed{\text{キ}}$である。

$0 < s < \boxed{\text{キ}}$のとき，$0 \leqq x \leqq s$における$y = f(x)$の最小値は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $-s-2$	① $-s+2$	② $s-2$	③ $s+2$
④ $-s^2-4s$	⑤ $-s^2+4s$	⑥ s^2-4s	⑦ s^2+4s

（数学Ⅰ第3問は次ページに続く。）

(3) k を正の定数とし

$$g(x) = x^2 - 4kx$$

とする。2次関数 $y = g(x)$ のグラフの頂点の座標を $(p,\ q)$ とする。

s を正の定数とする。太郎さんと花子さんは，$0 \leqq x \leqq s$ における $y = g(x)$ の最小値について考えている。

太郎：$f(x)$ と違って，$g(x)$ は k を含む式になっているね。

花子：そうだね。$y = g(x)$ のグラフの軸の位置に注目して最小値を考えてみよう。

(i) $0 \leqq x \leqq s$ における $y = g(x)$ の最小値が q であるための必要十分条件として，次の⓪～⑧のうち，正しいものは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ $s \geqq k$	① $s = k$	② $s \leqq k$
③ $s \geqq 2k$	④ $s = 2k$	⑤ $s \leqq 2k$
⑥ $s \geqq 4k$	⑦ $s = 4k$	⑧ $s \leqq 4k$

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

(ii)　$0 \leqq x \leqq s$ における $y = g(x)$ の最小値に関して，次の命題(a)，(b)の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{コ}$ である。

(a)　$k > 1$ かつ $s = k + 1$ ならば，最小値は q である。

(b)　$k > 1$ かつ $s = 3k - 1$ ならば，最小値は q である。

$\boxed{コ}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	真	真	偽	偽
(b)	真	偽	真	偽

（数学Ⅰ第3問は次ページに続く。）

〔2〕 花子さんと太郎さんは，コンピュータを使って，関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを表示させている。

(1) 花子さんが a，b，c の値を $a = 2$，$b = -7$，$c = 7$ と定めると，グラフとして放物線が表示された。この放物線の頂点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}},\ \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である。

（数学Ⅰ第3問は次ページに続く。）

(2) 花子さんと太郎さんは，$a = 2$，$b = -7$，$c = 7$ と定めたとき，関数 $y = 2x^2 - 7x + 7$ のグラフが，点 P(1，2)と点 Q(3，4)を通ることに気づいて，コンピュータの画面を見ながら，次のように話している。

花子：このグラフは 2 点 P(1，2)，Q(3，4)を通っているね。
太郎：a の値を変えるとグラフはどうなるのかな。
花子：a の値だけを変えたら，P，Q を通らなくなったよ。P，Q を通るようにするには，a の値に応じて b と c の値をどう変えたらよいのかな。

0 でない実数 a に対して

$$b = \boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}}\,a$$
$$c = \boxed{\text{チ}} + \boxed{\text{ツ}}\,a$$

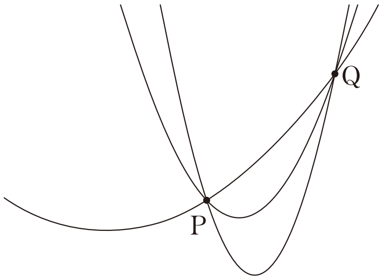
とすれば，関数

$$y = ax^2 + \left(\boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}}\,a\right)x + \boxed{\text{チ}} + \boxed{\text{ツ}}\,a \quad \cdots ①$$

のグラフは 2 点 P と Q を通る。

(数学Ⅰ第 3 問は次ページに続く。)

(3) 太郎さんと花子さんは，a の値を 0 より大きい範囲で変えながら，関数 ① のグラフを表示させて，頂点の y 座標について考えている。



参考図

太郎：a の値を 0 より大きい範囲で変えながら，関数 ① のグラフの頂点を考えてみようよ。

花子：グラフの頂点の y 座標が最大になるような関数はどのようなものなのかな。

太郎：グラフの頂点の座標を a の式で表して考えるのは，私たちには難しそうだね。別のやり方はないかな。

花子：グラフを表示してみたら，2 点 P$(1, 2)$，Q$(3, 4)$ とグラフの頂点との関係がわかるね。

太郎：どの a に対しても，関数 ① のグラフは必ず P と Q を通るね。

花子：しかも a が正の実数だから，関数 ① のグラフは下に凸で，頂点はグラフの一番下になるね。

太郎：そう考えると，頂点の y 座標が最大になるようなグラフが予想できるね。

グラフの頂点の y 座標の最大値は $\boxed{\text{テ}}$ であり，頂点の y 座標が最大になる a の値は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

（数学 I 第 3 問は次ページに続く。）

⑷　次に，花子さんと太郎さんは，a の値を 0 より小さい範囲で変えながら，関数 ① のグラフを表示させている。このとき，次の ⒜，⒝，⒞ のうちで，起こり得るものは $\boxed{\text{ニ}}$。

⒜　関数のグラフが点$(0, 3)$を通る。

⒝　関数のグラフと x 軸の負の部分が交わる。

⒞　関数のグラフの頂点の x 座標が 2 以下である。

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

⓪　ない
①　⒜ だけである
②　⒝ だけである
③　⒞ だけである
④　⒜ と ⒝ だけである
⑤　⒜ と ⒞ だけである
⑥　⒝ と ⒞ だけである
⑦　⒜ と ⒝ と ⒞ のすべてである

第４問 （配点　20）

〔1〕 太郎さんと花子さんは，令和４年度の全国体力・運動能力，運動習慣等調査(47 都道府県ごと)の結果を用いて，小学校第５学年の男子児童と中学校第２学年の男子生徒について，「運動(体を動かす遊びを含む)やスポーツをすることは好きですかという質問に対して，好きと回答した児童・生徒の割合」(以下，スポーツ好き)と「反復横とびの点数の平均値」(以下，反復横とび)の関係を調べることにした。

なお，以下の図については，スポーツ庁の Web ページをもとに作成している。

(1) 太郎さんは，スポーツ好きと反復横とびについて，小学校第５学年と中学校第２学年を合わせて図１のような散布図を作成した。

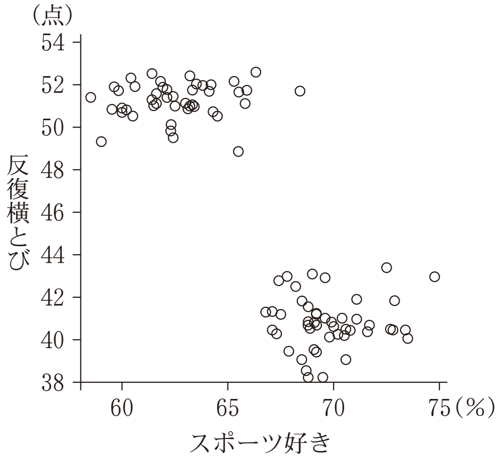


図１　スポーツ好きと反復横とびの散布図

(数学Ⅰ第４問は次ページに続く。)

太郎さんと花子さんは，図 1 について話している。

太郎：図 1 の点全体の散らばりの様子を見ると負の相関があるように思えるけど，一つの集団に見えないね。

花子：仮に，全体のデータで相関係数を計算したらどうなるかな。

図 1 におけるスポーツ好きと反復横とびの相関係数は -0.85 であった。図 1 の点全体の散らばりの様子から，小学校第 5 学年と中学校第 2 学年を合わせた全体について，スポーツ好きと反復横とびの間に負の相関があるとしたとき，次のことがいえる。

小学校第 5 学年と中学校第 2 学年を合わせた全体について，スポーツ好きが増えると，反復横とびは $\boxed{ア}$ 。

$\boxed{ア}$ については，最も適当なものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ 増える傾向がみられる

① 減る傾向がみられる

② 増える傾向も減る傾向もみられない

（数学Ⅰ第 4 問は次ページに続く。）

⑵　太郎さんと花子さんは，⑴を振り返りながら話している。

太郎：図1では二つの集団に見えるから，小学校第5学年と中学校第2学年は別々にして考えた方がいいよね。

花子：それぞれの散布図を作成して，相関係数も調べてみよう。

図2は小学校第5学年について，図3は中学校第2学年について，スポーツ好きと反復横とびの散布図を作成したものである。

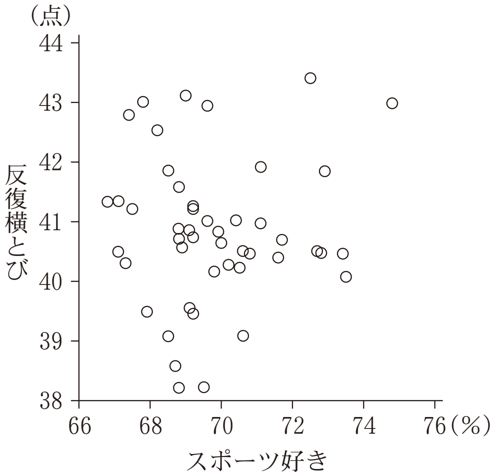


図2　スポーツ好きと反復横とびの散布図(小学校第5学年)

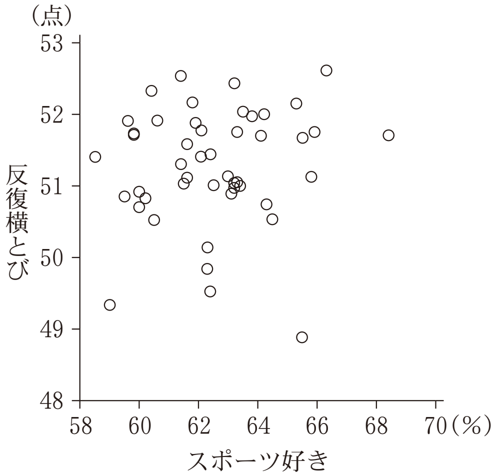


図3　スポーツ好きと反復横とびの散布図(中学校第2学年)

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

図 2 におけるスポーツ好きと反復横とびの相関係数は 0.07 であった。図 3 におけるスポーツ好きと反復横とびの相関係数はおよそ $\boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\text{イ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ －0.9	① －0.7	② 0.1	③ 0.7	④ 0.9

（数学Ⅰ第 4 問は次ページに続く。）

(3) 太郎さんと花子さんは，散布図においていくつかの集団があるときの全体の相関係数について関心をもち，簡単な例で考えることにした。

変量 x，y の値の組

$$(-1, 1),\ (1, -1)$$

を考える。このとき，相関係数は -1 となる。

この二つの値の組に，$(-2, 0)$，$(0, -2)$と$(0, 2)$，$(2, 0)$を加えた，合計六つの値の組を，データ W と呼ぶことにする。また，データ W の x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$，分散をそれぞれ $s_x{}^2$，$s_y{}^2$，共分散を s_{xy} とする。

データ W の x と y の相関係数を r_{xy} とし，この r_{xy} について考えよう。なお，必要に応じて，次に示す表 1 の計算表を用いて考えてもよい。

表 1　計算表

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
-1	1			
1	-1			
-2	0			
0	-2			
0	2			
2	0			

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

(i) $\bar{x} = \boxed{ウ}$, $s_x{}^2 = \boxed{エ}$, $s_{xy} = \boxed{オ}$ である。

ウ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{4}{3}$	⑥ $\frac{3}{2}$	⑦ $\frac{5}{3}$	⑧ $\frac{11}{6}$	⑨ $\frac{5}{2}$

エ の解答群

⓪ $\frac{7}{6}$	① 1	② 2	③ 3	④ $\frac{4}{3}$
⑤ 5	⑥ $\frac{3}{2}$	⑦ $\frac{5}{3}$	⑧ $\frac{11}{6}$	⑨ 10

オ の解答群

⓪ 0	① 1	② $-\frac{3}{2}$	③ -1	④ $-\frac{1}{2}$
⑤ $-\frac{1}{3}$	⑥ $\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{1}{2}$	⑧ $\frac{3}{2}$	

(ii) $s_x{}^2 = s_y{}^2$ であることに着目すると，$r_{xy} = \boxed{カ}$ となることがわかる。

カ の解答群

⓪ 0	① $-\frac{2}{3}$	② $-\frac{1}{2}$	③ $-\frac{1}{5}$	④ $-\frac{1}{6}$
⑤ $\frac{1}{6}$	⑥ $\frac{1}{5}$	⑦ $\frac{1}{2}$	⑧ $\frac{2}{3}$	

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

(4) a を正の数とする。変量 x，y の二つの値の組 $(-1, 1)$，$(1, -1)$ に

$$(-1-a,\ 1-a),\ (1-a,\ -1-a),$$
$$(-1+a,\ 1+a),\ (1+a,\ -1+a)$$

を加えた，合計六つの値の組を，データ W' と呼ぶことにする。

相関係数が正であるための必要十分条件は，共分散が正であることである。したがって，データ W' の x と y の相関係数が正であるための必要十分条件は

$$a > \frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

（数学 I 第 4 問は 64 ページに続く。）

〔2〕 データの値が a_1, a_2 であるものをデータ A, データの値が b_1, b_2 であるものをデータ B とし，これらを合わせた四つのデータの値

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$$

をそれぞれ

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$$

とおき，これをデータ Z と呼ぶことにする。データ A, B, Z の分散をそれぞれ ${s_A}^2$, ${s_B}^2$, ${s_Z}^2$ とするとき，それらの関係について考えよう。

データ A, B, Z の平均値をそれぞれ $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{z}$ とし，$k = \overline{a} - \overline{z}$ とおく。以下では，$k \neq 0$ の場合を考える。このとき，P, Q を

$$P = (z_1 - \overline{z})^2 + (z_2 - \overline{z})^2$$
$$Q = (z_3 - \overline{z})^2 + (z_4 - \overline{z})^2$$

とおくと

$$\begin{aligned} P &= (z_1 - \overline{z})^2 + (z_2 - \overline{z})^2 \\ &= (a_1 - \overline{z})^2 + (a_2 - \overline{z})^2 \\ &= \{(a_1 - \overline{a}) + k\}^2 + \{(a_2 - \overline{a}) + k\}^2 \end{aligned}$$

であり

$${s_A}^2 = \frac{P - \boxed{\text{ケ}}\,k^2}{2}$$

となることがわかる。同様にして

$${s_B}^2 = \frac{Q - \boxed{\text{ケ}}\,k^2}{2}$$

となることもわかる。

（数学 I 第 4 問は次ページに続く。）

これらのことと $k \neq 0$ に着目すると，$s_A{}^2$，$s_B{}^2$，$s_Z{}^2$ の関係として，次の⓪～③のうち，正しいものは $\boxed{コ}$ であることがわかる。

$\boxed{コ}$ の解答群

⓪ k の値によらず，つねに $s_Z{}^2 = \dfrac{1}{2}s_A{}^2 + \dfrac{1}{2}s_B{}^2$ が成り立つ。
① k の値によらず，つねに $s_Z{}^2 < \dfrac{1}{2}s_A{}^2 + \dfrac{1}{2}s_B{}^2$ が成り立つ。
② k の値によらず，つねに $s_Z{}^2 > \dfrac{1}{2}s_A{}^2 + \dfrac{1}{2}s_B{}^2$ が成り立つ。
③ $s_Z{}^2$ と $\dfrac{1}{2}s_A{}^2 + \dfrac{1}{2}s_B{}^2$ の大小関係は，k の値によって変わる。